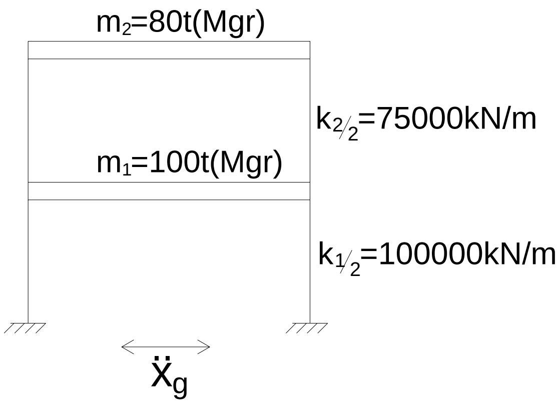
ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

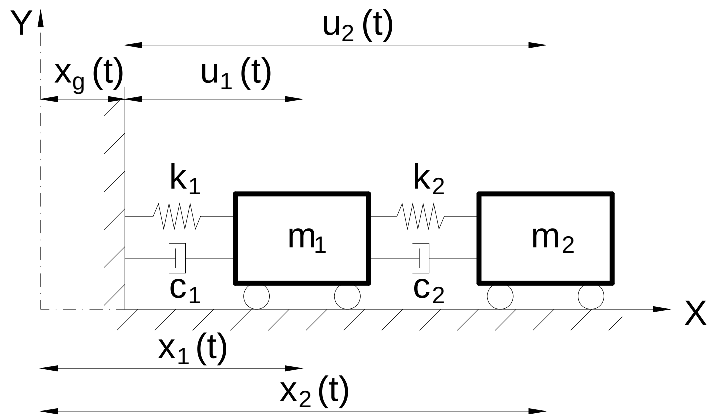
Μέθοδος: Δυναμική Φασματική Μέθοδος (Γενικής Εφαρμογής Ε.Α.Κ.)

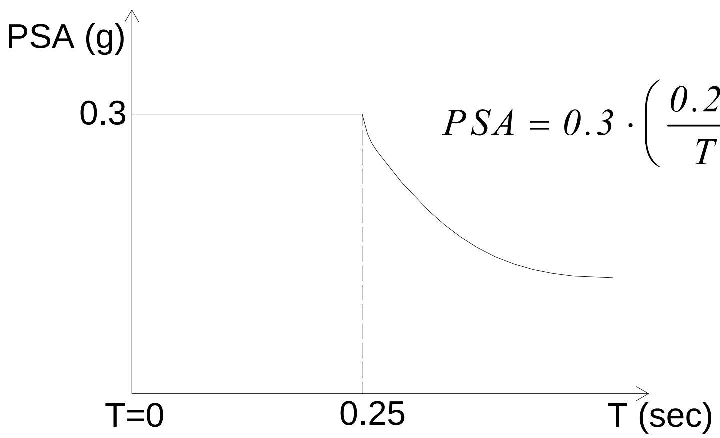
1. Μόρφωση των Εξισώσεων Κίνησης
2. Υπολογισμός των α) Ιδιοτιμών (ιδιοπεριόδων, ιδιοσυχνοτήτων)
   β) Ιδιομορφών
3. Ανάλυση της Μητρωικής Εξίσωσης Κίνησης
   - ασύζευκτες εξισώσεις σε συζευγμένες εξισώσεις
4. Επαλληλία Ιδιομορφικών Αποκρίσεων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟ ΚΤΙΡΙΟ

Για το φάσμα σχεδιασμού υπολογίστε τις μέγιστες σχετικές μετατοπίσεις των δύο ορόφων και τις τέμνουσες. Συντελεστής συμπεριφοράς q=3.

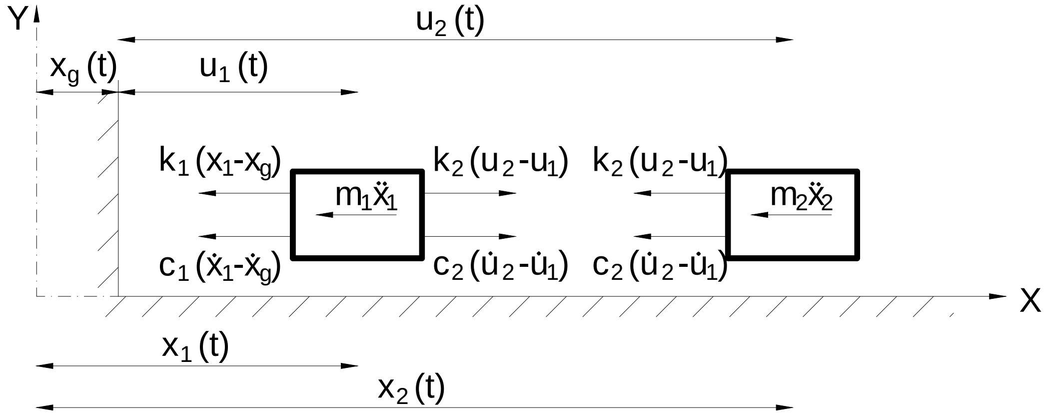






$$PSA = 0.3 \cdot \left(\frac{0.25}{T} \right)^{2/3} g$$

1. Μόρφωση Εξίσωσης Κίνησης



Σχετικές μετακινήσεις: u_1, u_2
Απόλυτες μετακινήσεις: x_1, x_2

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = x_1 - x_g \\ u_2 = x_2 - x_g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = u_1 + x_g \\ x_2 = u_2 + x_g \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 - x_1 = u_2 - u_1$$

Μάζα 1 : $m_1(\ddot{u}_1 + \ddot{x}_g) + c_1\dot{u}_1 + k_1 u_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - k_2(u_2 - u_1) = 0$
Μάζα 2 : $m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{x}_g) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) = 0$

$$m_1\ddot{u}_1 + (c_1 + c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = -m_1\ddot{x}_g$$
$$m_2\ddot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + c_2\dot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = -m_2\ddot{x}_g$$

<u>Μητρωική Εξίσωση Κίνησης</u>

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{x}_g \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{r\}\ddot{x}_g}$$

2. α) <u>Υπολογισμός Ιδιοτιμών</u> (ιδιοπεριόδων, ιδιοσυχνοτήτων):

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{0\} \qquad (2)$$

Θεωρούμε: $\{u\}=\left\{\varphi^{(i)}\right\}\cdot sin(\omega_i t-a)$ (3)

Για μονοβάθμιο σύστημα ισχύει:

$$m\ddot{u}+ku=0$$
$$u=A\cdot sin\omega t$$
$$\dot{u}=A\omega\cdot cos\omega t$$
$$\ddot{u}=-A\omega^2 sin\omega t$$
$$A\cdot\left(-m\omega^2+k\right)\cdot sin\omega t=0$$

Με χρήση της (3) και αντικατάσταση στην (2) προκύπτει:

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\cdot\left\{\varphi^{(i)}\right\}=\{0\} \qquad (4)$$

Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Για τον υπολογισμό των μη μηδενικών λύσεων πρέπει η ορίζουσα:

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \qquad (5)$$

Θέτουμε $\omega^2=\Omega$, και για το παράδειγμα μας έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 3.5\times 10^{-5} - 100\Omega & -1.5\times 10^{5} \\ -1.5\times 10^{5} & 1.5\times 10^{5} - 80\Omega \end{vmatrix} = 0$$

Αναπτύσσουμε για να λάβουμε τη <u>*χαρακτηριστική εξίσωση*</u>:

$3.5*1.5*10^{10}-(100*1.5+80*3.5)*10^{5}\Omega+100*80\Omega^{2}-1,52*10^{10}=0$

$\Rightarrow 8000\Omega^{2}-480*10^{5}\Omega+30*10^{10}=0$

$\Rightarrow \Omega^{2}-5375\Omega+3750000=0$

$$\Omega = \frac{5375 \pm \sqrt{5375^2 - 4\times 3750000}}{2} = \begin{Bmatrix} \omega_2^2 = 4551 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\Omega_2} = 67.46 rad/sec \\ \omega_1^2 = 824 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\Omega_1} = 28.71 rad/sec \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.22 sec, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.09 sec$$

2. β) Ιδιομορφές

Από την εξίσωση (4) έχουμε:

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\left\{\varphi^{(i)}\right\}=\{0\}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3.5\times10^5-100\omega_i^2 & -1.5\times10^5 \\ -1.5\times10^5 & 1.5\times10^5-80\omega_i^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1^{(i)}\\ \varphi_2^{(i)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{Bmatrix} \left(3.5\times10^5-100\omega_i^2\right)\varphi_1^{(i)}-1.5\times10^5\,\varphi_2^{(i)}=0 \\ -1.5\times10^5\,\varphi_1^{(i)}+\left(1.5\times10^5-80\omega_i^2\right)\varphi_2^{(i)}=0 \end{Bmatrix}\right\}\underline{\textit{Γραμμικά Εξαρτημένες}}$$

$\Rightarrow$ Θέτουμε $\varphi_2^{(1)}=1.0$ και λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις (π.χ. την πρώτη)

<u>1η ιδιομορφή</u>

$\omega_1{}^2 = 824, \quad \varphi_2{}^{(1)} = 1.0$

$(350000 - 82400)\ \varphi_1{}^{(1)} - 150000*1.0=0$

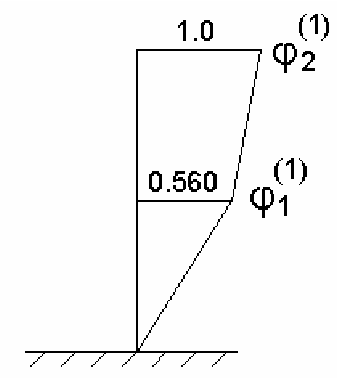
$\Rightarrow \boxed{\varphi_1{}^{(1)} = 0.560}$

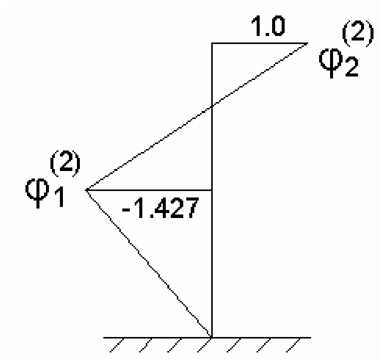
<u>2η ιδιομορφή</u>

$\omega_2{}^2 = 4551, \quad \varphi_2{}^{(2)} = 1.0$

$(350000 - 455100)\ \varphi_1{}^{(2)} - 150000*1.0=0$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1{}^{(2)} = -1.427}$





T_1=0.22sec
ω_1=28.71 rad/sec

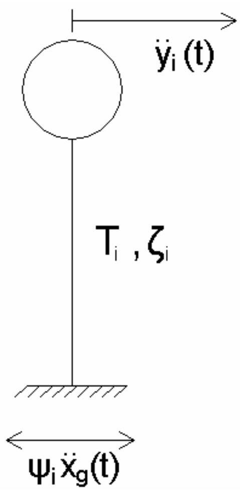
T_2=0.09sec
ω_2=67.46 rad/sec

$$\{\varphi\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varphi_2^{(1)} \\ \varphi_1^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.56 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varphi\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varphi_2^{(2)} \\ \varphi_1^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.427 \end{Bmatrix}$$

3-4. Ανάλυση της εξίσωσης κίνησης και χρονική επαλληλία.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_2^{(1)} \\ \varphi_1^{(1)} \end{Bmatrix} y_1(t) + \begin{Bmatrix} \varphi_2^{(2)} \\ \varphi_1^{(2)} \end{Bmatrix} y_2(t) + \ldots \qquad (6)$$



$$u_1 = \varphi_1^{(1)} y_1(t) + \varphi_1^{(2)} y_2(t) \qquad (7)$$

$$u_2 = \varphi_2^{(1)} y_1(t) + \varphi_2^{(2)} y_2(t) \qquad (8)$$

όπου:

$$\ddot{y}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\psi_i \ddot{x}_g(t) \qquad (9)$$

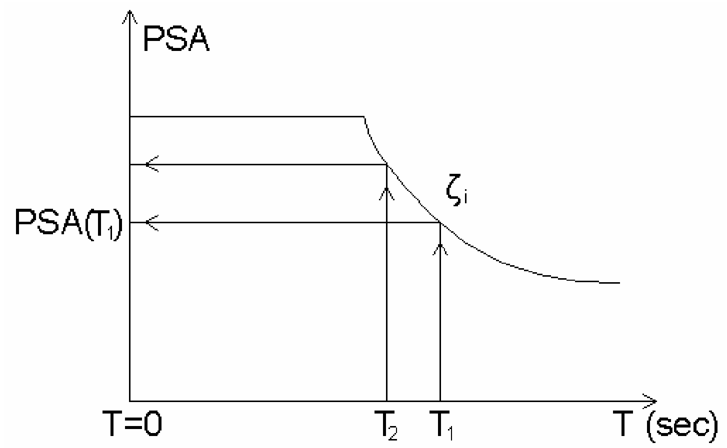
$$\psi_i = \frac{\sum m_j \varphi_j^{(i)}}{\sum m_j \left(\varphi_j^{(i)}\right)^2} \quad \underline{\textit{συντελεστής συμμετοχής i ιδιομορφής}} \qquad (10)$$

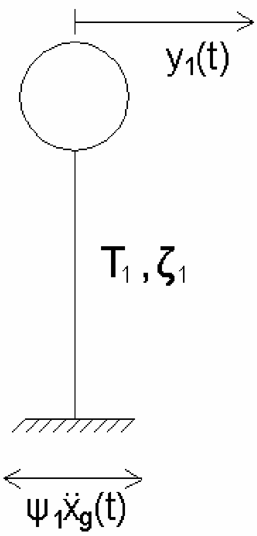
$$\psi_1 = \frac{m_1\varphi_1^{(1)} + m_2\varphi_2^{(1)}}{m_1\left(\varphi_1^{(1)}\right)^2 + m_2\left(\varphi_2^{(1)}\right)^2} = \frac{100 \times 0.56 + 80 \times 1.0}{100 \times 0.56^2 + 80 \times 1.0^2} = 1.221$$

$$\psi_2 = \frac{m_1\varphi_1^{(2)} + m_2\varphi_2^{(2)}}{m_1\left(\varphi_1^{(2)}\right)^2 + m_2\left(\varphi_2^{(2)}\right)^2} = \frac{100 \times (-1.427) + 80 \times 1.0}{100 \times (-1.427)^2 + 80 \times 1.0^2} = -0.022$$

.

<u>ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ</u>





- <u>Μέγιστη y_1(t) από (9)</u>

$$max y_1(t) = \psi_1 SD(T_1) = \psi_1 \frac{PSA(T_1)}{\omega_1^2} \qquad (11)$$

- <u>Μέγιστη $u^{(1)}$ από (7)</u>

$$u_1^{(1)} = \psi_1 SD(T_1) \varphi_1^{(1)} = \psi_1 \frac{PSA(T_1)}{\omega_1^2} \varphi_1^{(1)} = 0.0025m$$

$$u_1^{(2)} = \psi_2 \frac{PSA(T_2)}{\omega_2^2} \varphi_1^{(2)} = 2.1 \times 10^{-4}\, m$$

<u>Προσοχή:</u> $\boxed{PSA(T) = \Phi_d(T, q=1) = q \cdot \Phi_d(T)}$

- <u>Εκτίμηση $\{u\}$ με SRSS</u>

$$u_1 = \sqrt{\left(u_1^{(1)}\right)^2 + \left(u_1^{(2)}\right)^2 + \ldots} = \sqrt{(0.0025)^2 + \left(2.1 \times 10^{-4}\right)^2} = 2.5mm$$

$$u_2 = 4.4mm$$

<u>Παρατήρηση</u>

Συμβολή της πρώτης ιδιομορφικής απόκρισης $u_1^{(1)}$

- <u>ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΙΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ</u>

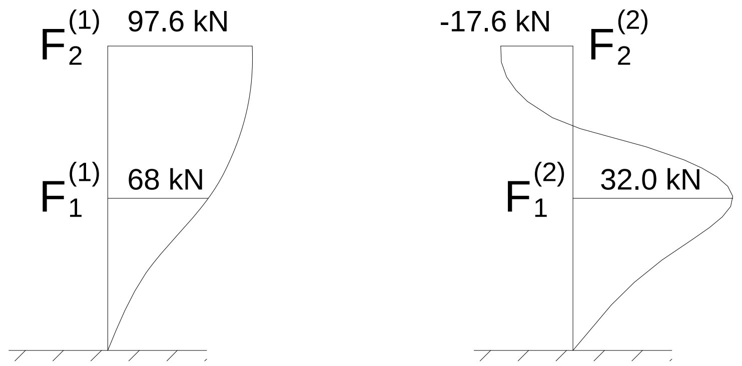
$$a_1^{(i)} = \psi_i \cdot \Phi_d(T_i) \cdot \varphi_1^{(i)}$$

$$\Phi_d(T_i) = \frac{PSA(T_i)}{q} \qquad \text{(q=3)}$$

- <u>ΦΟΡΤΙΑ ΟΡΟΦΩΝ</u>

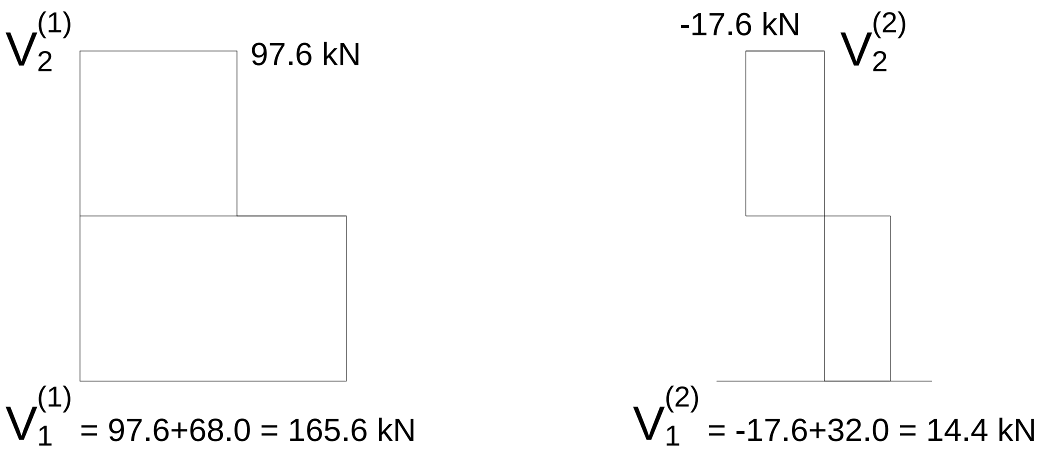
$$F_1^{(i)} = m_1 \cdot a_1^{(i)}$$

$$F_2^{(i)} = m_2 \cdot a_2^{(i)}$$



i=1 i=2

- <u>ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΟΡΟΦΩΝ</u>



i=1 i=2

- <u>Συνδυασμός SRSS</u>

$$V_2 = \sqrt{\left(V_2^{(1)}\right)^2 + \left(V_2^{(2)}\right)^2} = \sqrt{97.6^2 + (-17.6)^2} = 99.17\ kN$$

$$V_1 = \sqrt{\left(V_1^{(1)}\right)^2 + \left(V_1^{(2)}\right)^2} = \sqrt{165.6^2 + 14.4^2} = 166.22\ kN$$

<u>Παρατήρηση</u>

Συμβολή της πρώτης ιδιομορφικής απόκρισης $V_1^{(1)}$

ΠΛΗΘΟΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Πόσες ιδιομορφές απαιτούνται για τον υπολογισμό της απόκρισης με ικανοποιητική ακρίβεια;

Για κτιριακές κατασκευές χρησιμοποιείται το *κριτήριο της ιδιομορφικής μάζας*

Διαδικασία:

- Υπολογίζεται η δρώσα ιδιομορφική μάζα ανά διεύθυνση:

$$M_i = \psi_i \sum_{j=1}^{N} m_j \varphi_j^{(i)} \qquad (\alpha)$$

Τι εκφράζει η ιδιομορφική μάζα:

Φορτίο ορόφου – *j* ανά ιδιομορφή – *i*

1ος όροφος $F_1^{(i)} = m_1 \cdot a_1^{(\iota)}$

2ος όροφος $F_2^{(i)} = m_2 \cdot a_2^{(\iota)}$

…

j- όροφος $F_j^{(i)} = m_j \cdot a_j^{(i)}$

- Τέμνουσα στη βάση για την ιδιομορφή (i)

$$V_B^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} F_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} m_j a_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \psi_i \cdot \Phi_d(T) \cdot \varphi_j^{(i)}$$

$$V_B^{(i)} = \Phi_d(T) \cdot \left(\psi_i \sum_{j=1}^{N} m_j \varphi_j^{(i)} \right) \qquad (\beta)$$

Από τη σχέση (α) προκύπτει:

$$V_B^{(i)} = \Phi_d(T) M_i$$

Εφαρμογή:

1. Υπολογισμός ιδιομορφικών μαζών

$$M_1 = \psi_1\left(m_1\varphi_1^{(1)} + m_2\varphi_2^{(1)}\right) = 166.06Mgr$$

$$M_2 = \psi_2\left(m_1\varphi_1^{(2)} + m_2\varphi_2^{(2)}\right) = 13.86Mgr$$

2. Υπολογισμός συνολικής αδράνειας:

$M_T = m_1+m_2 = 180$ Mgr

3. Σύγκριση:

0,90 M_T =0,90·180 = 162 Mgr

$M_1 > 0{,}90\ M_T$

⇒ Άρα αρκεί η 1η ιδιομορφή